高校入試 模擬試験 [数学] 時間 50 分 満点 100 点

問題 1　次の (1) から (10) の問いに答えなさい。

(1) $-3-(-5)$ を計算せよ。

$-3-(-5)=-3+5=2$　(3 点)

(2) $7(2x+y)-5(x-y)$ を計算せよ。

$7(2x+y)-5(x-y)=14x+7y-5x+5y=9x+12y$　(3 点)

(3) $(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)$ を計算せよ。

$(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$　(4 点)

＜別アプローチ＞

$(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)=\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$ として乗法公式を用いても良い。

(4) 等式 $y=7x+2$ を x について解け。

$y=7x+2$

$7x=y-2$

$x=\frac{y-2}{7}$　(4 点)

(5) 二次方程式 $3x^2+3x-12=0$ を解け。

$3x^2+3x-12=0$

$x^2+x-4=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-4)}}{2\times1}$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$　(4 点)

(6) 1から6までのどの目が出ることも, 同様に確からしいさいころが1個ある。

このさいころを2回投げて，1回目に出た目をa,

2回目に出た目をbとするとき，$a-2b$が自然数になる確率を求めよ。

全部で36通りの目の出方があり
$a-2b$が自然数になる場合は,
$(a,b)=(3,1)(4,1)(5,1)(5,2)(6,1)(6,2)$
よって確率は　$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$　(4点)

(7) yはxに比例し，$x=6$ のとき $y=-9$ である。

yの増加量が18のとき，xの増加量を求めよ。

比例定数aとして　$y=ax$
$a=\frac{-9}{6}=-\frac{3}{2}$
yの増加量が18のときのxの増加量は
$18\div(-\frac{3}{2})=-12$　(4点)

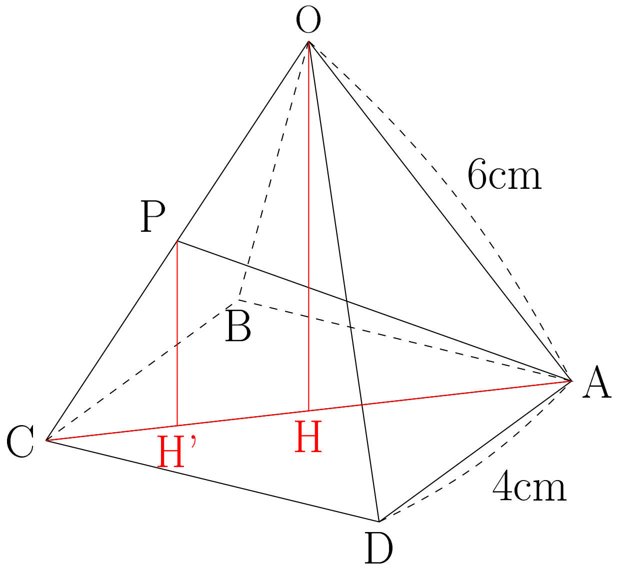
(8) △ABC と△DEF は相似で，その相似比は1 : 2である。

△DEF の面積が$9\mathrm{cm}^2$であるとき，△ABC の面積は何cm^2か。

相似比1 : 2より面積比は$1^2:2^2=1:4$
△DEF の面積 $9\mathrm{cm}^2$ より
△ABC の面積は
$9\times\frac{1}{4}=\frac{9}{4}\ \mathrm{cm}^2$　(4点)

(9) 図のような正四角錐 OABCD がある。

線分 OC の中点を P とするとき，△PAC の面積を求めよ。



底面の正方形の対角線の長さは $4\sqrt{2}$ cm

点 O から底面に垂線 OH をひき，

△OAH について三平方の定理より

$\mathrm{OH}^2 = 6^2 - (2\sqrt{2})^2 = 28$

OH>0 より OH$=2\sqrt{7}$

点 P から底面に垂線 PH' をひくと，

点 P は辺 OC の中点なので，

PH'$=\frac{1}{2}\times$OH$=\sqrt{7}$

△PAC の面積

$\frac{1}{2}\times(4\sqrt{2})\times\sqrt{7} = 2\sqrt{14}$ cm^2　(5 点)

(10) 次の表は，クラスの生徒 20 人が夏休みの間に読んだ本の冊数をまとめたものである。この表について次の a から d のうち正しいものを 1 つ選んで，その記号を書け。

読んだ本の冊数 (冊)

1	0	1	5	2	7	2	3	6	3
3	1	3	4	5	4	3	5	3	2

a. 四分位範囲は 3 冊である。

b. 第 3 四分位数は 4.5 冊である。

c. 最頻値は 2 冊である。

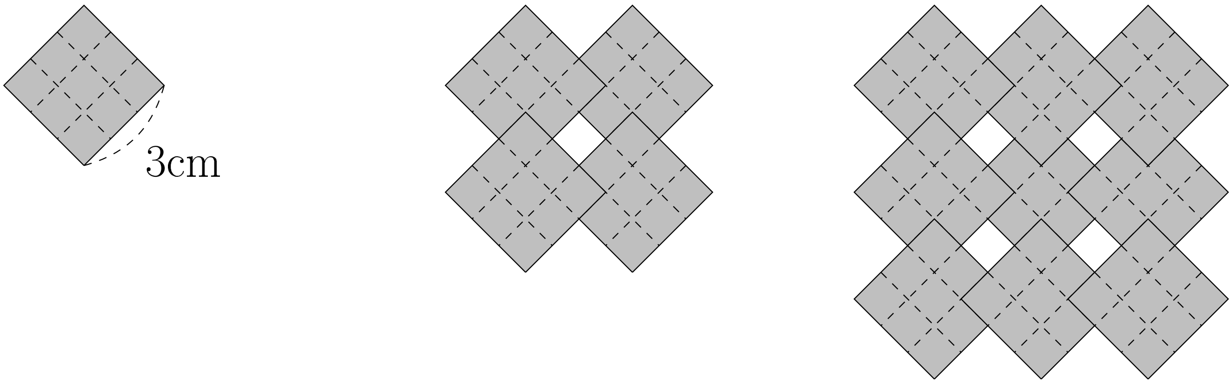
d.20 人が読んだ本の冊数の平均値よりも，多くの本を読んだ生徒が 10 人以上いる。

第 1 四分位数は 5 番目と 6 番目の平均から $(2+2)\div 2 = 2$
第 3 四分位数は 15 番目と 16 番目の平均から $(4+5)\div 2 = 4.5$
四分位範囲は $4.5 - 2 = 2.5$
最頻値は 6 人が読んでいた冊数で 3
平均値は 3.15 冊で，これより多くの本を読んだ生徒の人数は 7
以上より b　(5 点)

読んだ本の冊数 (冊)

0	1	1	1	2	2	2	3	3	3
3	3	3	4	4	5	5	5	6	7

問題2　1辺の長さが3 cm の正方形の紙がたくさんある。n を自然数とし，この紙 n^2 枚を用いて規則的に並べ，次の図のように図形を作る。紙と紙が重なっている部分は1辺の長さが1 cm の正方形である。このとき，次の (1) から (4) の問いに答えなさい。



・$n=1$　・$n=2$　・$n=3$

(1) 16 枚の紙を用いたとき，紙と紙が重なっている部分の面積を求めよ。

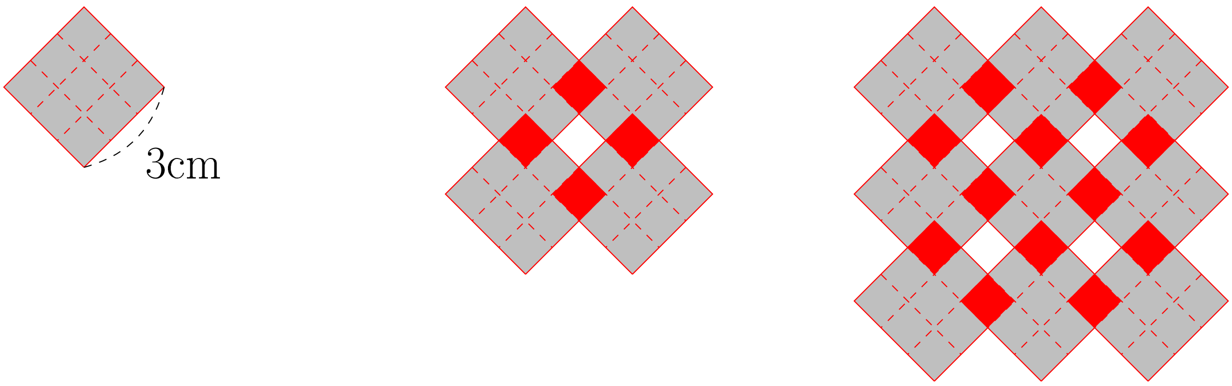
(2) n^2 枚の紙を用いたとき，紙と紙が重なっている部分の面積を n を用いて表せ。

(3) n^2 枚の紙を用いたとき，紙と紙が重なっていない部分の面積を n を用いて表せ。

(4) n^2 枚の紙を用いたとき，紙と紙が重なっていない部分の面積が，

紙と紙が重なっている部分の面積の3倍に等しくなった。

このときの n の値を求めよ。

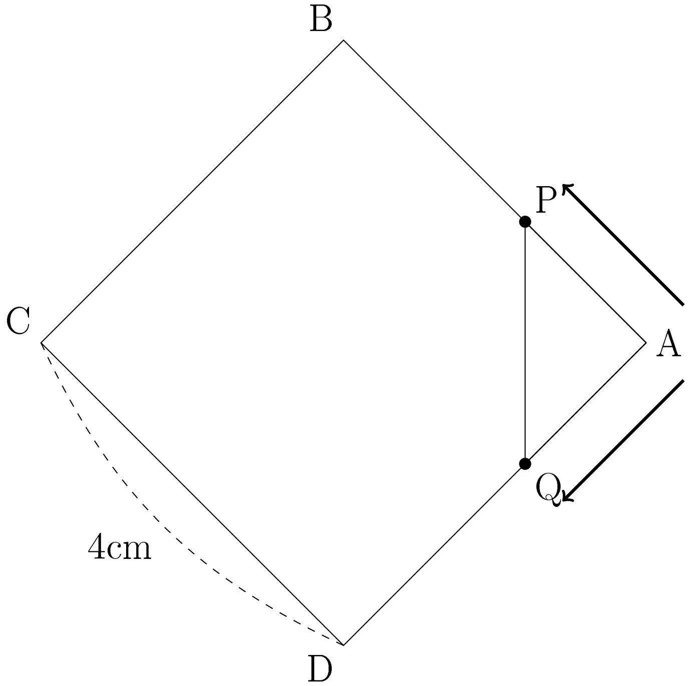


・$n=1$　　・$n=2$　　・$n=3$

1 枚の紙の面積は $9\ \mathrm{cm}^2$ で，これを n^2 枚用いている。
重なりを考えない場合の面積は $9n^2\ \mathrm{cm}^2$
重なっている部分の面積は $1\ \mathrm{cm}^2$ で，
紙の左右が重なっている場所が $(n-1)\times n$ 個
紙の上下が重なっている場所は $(n-1)\times n$ 個あるので，
紙と紙が重なっている部分の面積は $2n(n-1)\ \mathrm{cm}^2$
紙と紙が重なっていない部分の面積は
$9n^2-2\times 2n(n-1)=5n^2+4n$ から $(5n^2+4n)\ \mathrm{cm}^2$

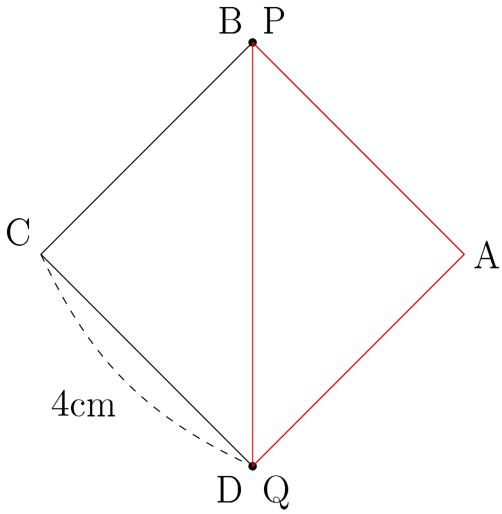
(1)
16 枚の紙を用いるのは $n=4$ のときで，
紙と紙が重なっている部分の面積は
$2n(n-1)=2\times 4\times(4-1)=24$　　$24\ \mathrm{cm}^2$　(3 点)
(2)
$2n(n-1)=2n^2-2n$　　$(2n^2-2n)\ \mathrm{cm}^2$　(4 点)
(3)
$(5n^2+4n)\ \mathrm{cm}^2$　(4 点)
(4)
$(5n^2+4n)=3(2n^2-2n)$
$n^2-10n=0$
$n(n-10)=0$
$n=0, n=10$
$n>0$ より $n=0$ は問題に合わない。　$n=10$ は問題に合う。
$n=10$　(5 点)

問題3　図のような1辺 4 cm の正方形ABCDがある。点Pは点Aを出発して点B，点Cの順に左回りで正方形の周上を秒速1 cm で移動する。点Qは点Aを出発して点D，点Cの順に右回りで正方形の周上を秒速1 cm で移動する。点Pと点Qが点Aを同時に出発してから，x 秒後の△APQの面積を y cm^2 とするとき，次の(1)から(4)の問いに答えなさい。



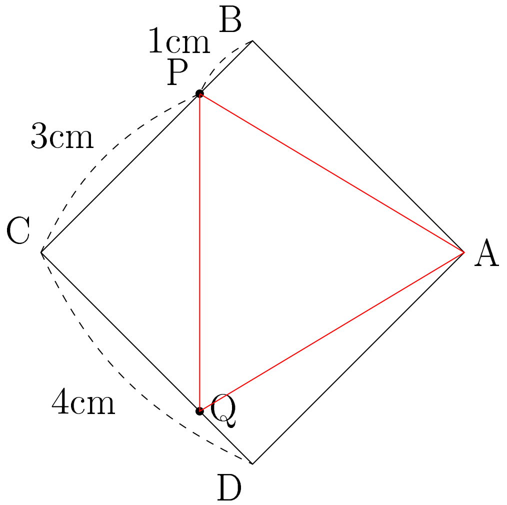
(1) $x = 4$ のとき，y の値を求めよ。

$x = 4$のとき，点Pは点Bに，点Qは点Dにいて，
このとき，
$y = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$
$y = 8$　(2点)



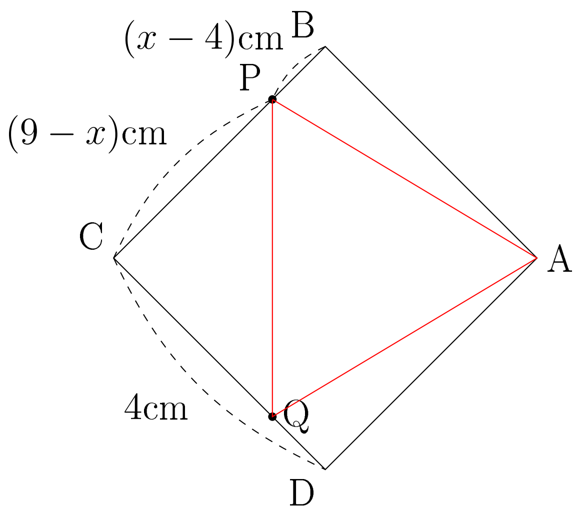
(2) $x=5$ のとき，y の値を求めよ。

点Pは辺BC上，点Qは辺DC上にいて，
正方形から3つの三角形,△ABP,△ADQ,△CPQの面積をひいて,
$y=4^2-\frac{1}{2}\times 1\times 4-\frac{1}{2}\times 1\times 4-\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{15}{2}$
$y=\frac{15}{2}$　(3点)



(3) x の変域が $4\leqq x\leqq 8$ のとき，y を x の式で表せ。

点Pは辺BC上，点Qは辺DC上にいて，
正方形から3つの三角形,△ABP,△ADQ,△CPQの面積をひいて,
$y=4^2-\frac{1}{2}\times(x-4)\times 4-\frac{1}{2}\times(x-4)\times 4-\frac{1}{2}\times(9-x)\times(9-x)=-\frac{1}{2}x^2+4x$
$y=-\frac{1}{2}x^2+4x$　(4点)



(4) $0 \leqq x \leqq 8$ とする。△APQ の面積が $2\,\mathrm{cm}^2$ となる x の値を求めよ。

$0 \leqq x \leqq 4$ のとき,△APQ の面積は ∠PAQ$=90°$,AP=AQ$=x$ より

$y = \frac{1}{2}x^2$

$y = 2$ となるのは

$2 = \frac{1}{2}x^2$

$x = -2, 2$

$0 \leqq x \leqq 4$ より $x = -2$ は問題に合わない。 $x = 2$ は問題に合う。

$4 \leqq x \leqq 8$ のとき $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$

$y = 2$ となるのは

$2 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$

$x^2 - 8x + 4 = 0$

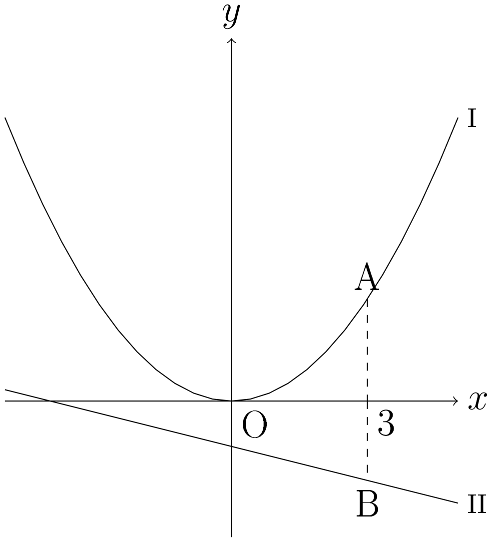
$x = 4 \pm 2\sqrt{3}$

$4 \leqq x \leqq 8$ より $x = 4 - 2\sqrt{3}$ は問題に合わない。

$x = 4 + 2\sqrt{3}$ は問題に合う。

$x = 2, x = 4 + 2\sqrt{3}$　(5 点)

問題4　次の図で，点Oは原点であり，放物線Iは関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフである。直線IIは関数 $y=px-1$ のグラフで，$p<0$ である。点Aは放物線I上の点，点Bは直線II上の点で，この2点の x 座標はともに3である。このとき，次の(1)から(4)の問いに答えなさい。



(1) 点Oを回転の中心として，点Aを点対称移動した点の座標を求めよ。

点Aは x 座標が3，　放物線I上の点なので，
その y 座標は $y=\frac{1}{4}\times 3^2=\frac{9}{4}$
点Oを回転の中心として，$A(3,\frac{9}{4})$ を点対称移動した点の座標は，
$(-3,-\frac{9}{4})$　(2点)

(2) 関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ について，x の変域が $-4\leqq x\leqq 3$ のとき，y の変域を求めよ。

y の最大値は $x=-4$ のとき，　$y=\frac{1}{4}\times(-4)^2=4$
y の最小値は $x=0$ のとき，　$y=0$
よって　$0\leqq y\leqq 4$　(3点)

(3) $p=-4$ のとき，$\triangle OAB$ の面積を求めよ。

点Bは x 座標が3，　直線II上の点なので，
その y 座標は $y=-4\times 3-1=-13$
$A(3,\frac{9}{4})$ と $B(3,-13)$ から $AB=\frac{9}{4}-(-13)=\frac{61}{4}$
$\triangle OAB$ の面積は線分ABの長さおよび点Aと点Bの x 座標から，
$\frac{1}{2}\times\frac{61}{4}\times 3=\frac{183}{8}$
$\frac{183}{8}$　(4点)

(4) 線分 AB の中点を点 C とする。直線 II と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ点 D，点 E とする。DA/ /EC となるとき，p の値を求めよ。

点 C は線分 AB の中点なので BC:CA= 1 : 1
DA/ /EC となるには BE:ED= 1 : 1 となれば良い。
このとき，点 B の x 座標が 3 で，点 E の x 座標が 0 なので，
点 D の座標は D$(-3, 0)$
直線 I $y = px - 1$ が D$(-3, 0)$ を通るような p の値は
$0 = p \times (-3) - 1$
$p = -\frac{1}{3}$
$p = -\frac{1}{3}$　(5 点)

問題５　図のような AB = AC の二等辺三角形 ABC がある。線分 AB を直径とする円 O と辺 AC の交点を D とする。点 D を通り，辺 BC に平行な直線と，直線 AB との交点を E，円 O との交点で点 D と異なるもの F とする。点 F と点 B，点 A を結ぶ。$AB = 5\,\mathrm{cm}, BC = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ であるとき，次の (1) から (4) の問いに答えなさい。

(1) △EFB∽△EAD を証明せよ。

△EFB と △EAD について，
仮定より，円周上の点なので，
弧 AF について円周角の定理から
∠EBF= ∠EDA⋯⋯(1)
同じく弧 BD について
∠BFE= ∠DAE⋯(2)
(1)(2) より，
2 組の角がそれぞれ等しいので，
△EFB∽△EAD　(3 点)
＜別アプローチ＞
対頂角が等しいことを用いても良い。

(2) △ABC の面積を求めよ。

二等辺三角形 ABC について，
点 A から辺 BC に垂線 AH をひくと，
∠AHB= 90°
$\mathrm{BH}= 2\sqrt{2} \div 2 = \sqrt{2}$
三平方の定理から
$\mathrm{AH}^2 = 5^2 - (\sqrt{2})^2 = 23$
AH> 0 より $\mathrm{AH}= \sqrt{23}$
△ABC の面積は
$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{23} = \sqrt{46}$
$\sqrt{46}\ \mathrm{cm}^2$　(4 点)

(3) 線分 CD の長さを求めよ。

線分 AB は円の直径なので，半円の弧に対する円周角から，
$\angle ADB = 90°$
$\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2} \times AC \times BD$ で求められるので，
$\sqrt{46} = \frac{1}{2} \times 5 \times BD$ よって $BD = \frac{2\sqrt{46}}{5}$
$\triangle BCD$ について三平方の定理から
$CD^2 = (2\sqrt{2})^2 - (\frac{2\sqrt{46}}{5})^2 = \frac{16}{25}$
$CD > 0$ より $CD = \frac{4}{5}$
$\frac{4}{5}$ cm　(4 点)

(4) 点 D と円の中心 O を結ぶ。$\triangle AOD$ の面積は $\triangle ABC$ の何倍か，求めよ。

$\triangle ABC$ の面積を S とする。
線分 AB は円の直径で，点 O は円の中心なので，
$AO:AB = 1:2$ より
$\triangle AOC = \frac{1}{2}S$
$CD = \frac{4}{5}$ なので
$AD:AC = (5 - \frac{4}{5}) : 5 = 21 : 25$ より
$\triangle AOD = \frac{21}{25}\triangle AOC = \frac{21}{25} \times \frac{1}{2}S = \frac{21}{50}S$
$\frac{21}{50}$ 倍　(5 点)