高校入試 模擬試験 [数学] 時間 50 分 満点 100 点

問題 1　次の (1) から (10) の問いに答えなさい。

(1) $1-(-2)$ を計算せよ。

$1-(-2)=3$　(3 点)

(2) $24\times\frac{2a-b}{3}$ を計算せよ。

$24\times\frac{2a-b}{3}=8(2a-b)=16a-8b$　(3 点)

(3) $\sqrt{8}-\sqrt{2}(2-\sqrt{2})$ を計算せよ。

$\sqrt{8}-\sqrt{2}(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2=2$　(4 点)

(4) 二次方程式 $(x-9)^2=27$ を解け。

$(x-9)^2=27$
$x-9=\pm3\sqrt{3}$
$x=9\pm3\sqrt{3}$　(4 点)

(5) y は x に反比例し，$x=3$ のとき $y=-9$ である。y を x の式で表せ。

比例定数 a として
$-9=\frac{a}{3}$
$a=-27$
$y=-\frac{27}{x}$　(4 点)

(6) ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプをよくきって，
そこから札を 1 枚ひくとき，素数の札をひく確率を求めよ。
ただし，トランプのどの札をひくことも，同様に確からしいものとする。

1 から 13 の中で素数は $2,3,5,7,11,13$ の 6 つ
$\frac{6}{13}$　(4 点)

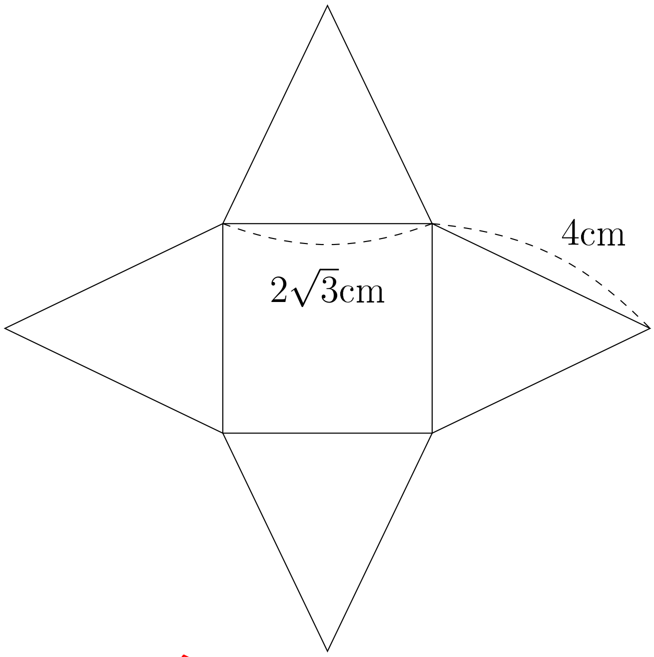
(7) 直線 $3x+y=-9$ と x 軸との交点の座標を求めよ。

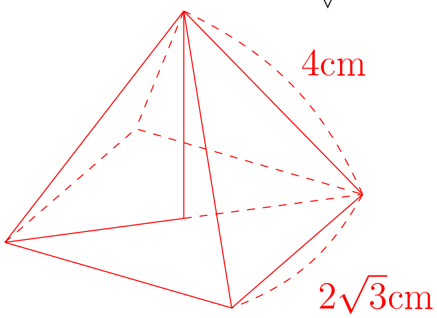
x 軸との交点より $y=0$ を直線の式に代入し
$3x+0=-9$
$x=-3$
$(-3,0)$　(4 点)

(8) 半径 3cm の球の表面積は，半径 4cm の球の表面積の何倍か，求めよ。

この2つの球は相似な立体でその相似比は $3:4$
表面積の比は $3^2:4^2=9:16$
$\frac{9}{16}$ 倍　（4点）

(9) 次の図は正四角錐の展開図である。この正四角錐の体積を求めよ。





底面の正方形の対角線の長さは $2\sqrt{6}$ cm
正四角錐の高さは三平方の定理より $\sqrt{4^2-(\sqrt{6}^2)}=\sqrt{10}$ cm
正四角錐の体積は $\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{10}=4\sqrt{10}$ cm^3
$4\sqrt{10}$ cm^3　(5点)

(10) 次の表は，あるクラス 20 人の身長を測定し，

その結果を度数分布表にまとめたものである。

この資料の中央値が 154cm であるとき，a の値を求めよ。

階級（cm）	度数（人）
以上　未満	
146〜148	1
148〜150	3
150〜152	3
152〜154	a
154〜156	6
156〜158	b
158〜160	c
計	20

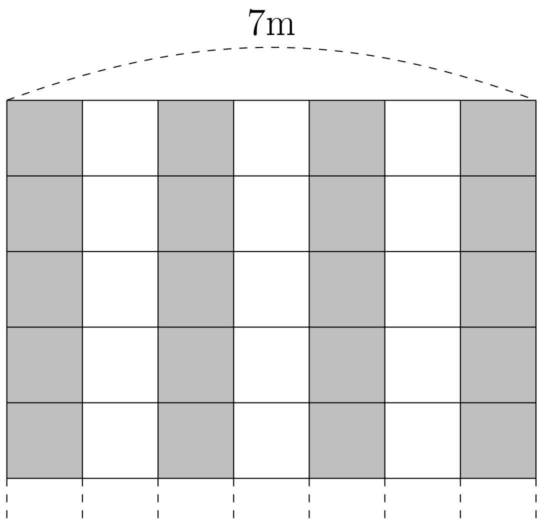
中央値 154 cm より，

小さい方から 10 人目の階級値が 153 cm，

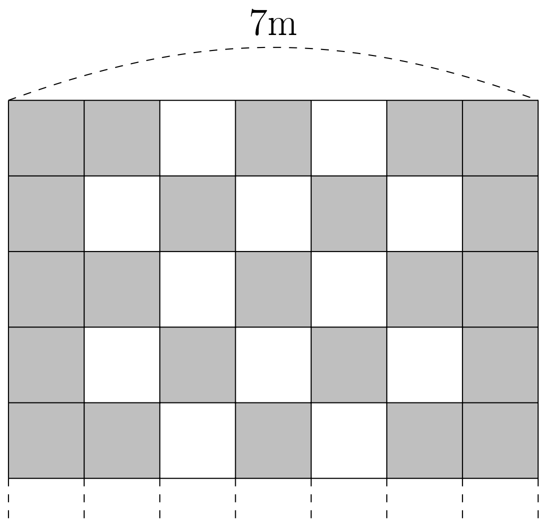
小さい方から 11 人目の階級値が 155 cm となればよい。

$a = 3$　(5 点)

問題２　教室の床にタイルを敷く。黒いタイルが 65 枚，白いタイルが 35 枚あり，どちらも１辺の長さが 1m の正方形の形をしている。教室は横が 7m で，奥行きの長さは分からない。ただし，教室の横方向，奥行き方向ともにタイルがピッタリ配置できることが分かっている。黒いタイルが多いことから，次のパターン A とパターン B のどちらかでの配置を検討している。教室の奥行きを x m とするとき，次の (1) から (3) の問いに答えなさい。



・パターン A



・パターン B

(1) パターン A のようにタイルを配置するとき，

黒のタイルの使用枚数を x を用いて表せ。

奥行き x m でタイルの１辺の長さが１ m から，
１列に配置できるタイルの枚数は x 枚。これが４列ある。
$4x$ 枚　(２点)

(2) パターン B のようにタイルを配置する場合について，

次のア，イの問いに答えよ。

(ア) 奥行き方向にタイルが偶数枚配置できるとき，

白のタイルの使用枚数を x を用いて表せ。

白のタイルは奥行き２ m 分で５枚が用いられる。
奥行き方向に偶数枚配置できることから，
白のタイルの使用枚数は $5 \times \frac{x}{2}$ 枚。
$\frac{5}{2}x$ 枚　(３点)

(イ) 奥行き方向にタイルが奇数枚配置できるとき，

白のタイルの使用枚数を x を用いて表せ。

白のタイルは奥行き2 m分で5枚が用いられる。
奥行き方向に奇数枚配置できることから，
白のタイルの使用枚数は $5 \times \frac{x-1}{2} + 2$ 枚。
$\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$ 枚　(4点)

(3) パターンAで配置した場合の黒のタイルの余り枚数は，

パターンBで配置した場合の白のタイルの余り枚数よりも16枚多かった。

教室の奥行きは何mか求めよ。

・奥行き方向に偶数枚のタイルが配置できる場合
黒のタイルと白のタイルの余り枚数より，
$65 - 4x = 35 - \frac{5}{2}x + 16$
$x = \frac{28}{3}$
これは問題に適していない。

・奥行き方向に奇数枚のタイルが配置できる場合
黒のタイルと白のタイルの余り枚数より，
$65 - 4x = 35 - (\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}) + 16$
$x = 9$
これは問題に適している。

教室の奥行き 9m　(5点)

問題3　れんくんとあおくんは，野球に関する雑談をしている。次は，2人の会話の一部である。次の (1) から (3) の問いに答えなさい。

【会話の一部】

〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜

【れん】野球の発祥の地，そして本場といえばアメリカのメジャーリーグだね。

メジャーリーグには全部で30チームが所属しているよ。

【あお】日本人メジャーリーガーの活躍もニュースでよく見かけるね。

【れん】実は野球場の形って，ひとつひとつ違うって知ってる？

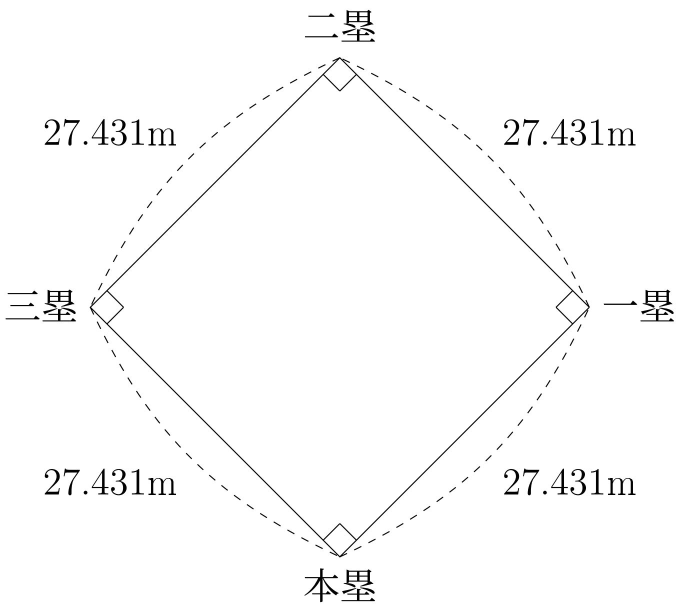
【あお】そうなの？

【れん】フェンスの高さや外野の広さは球場によって個性があるよ。

【あお】だから球場ごとにホームランの出やすさが違うんだね。

【れん】でも，打者が走ることになる内野のサイズは厳密に決められていて，

この図のようになっているよ。



【あお】この四角形は，全ての辺の長さが等しく，

全ての内角も等しいから (ア) だね。

１辺の長さが整数じゃないのはなぜだろう。

【れん】メートルではなくフィートにすると，整数になるよ。

【あお】1メートルはおよそ3.28フィートだったかな。

【れん】うん。だから，本塁から一塁までの距離は (イ) フィート。

【あお】なるほど。

でも，本塁から二塁までの距離はフィートでもメートルでも整数にならないね。

【れん】本塁から二塁までの距離は，本塁から一塁までの距離の (ウ) 倍で，

(ウ) は無理数だから綺麗な整数にはならないよ。

【あお】ところで，守備は何人なの？

【れん】外野に3人，内野に6人が基本だね。

内野は本塁に捕手，一塁に一塁手，三塁に三塁手，

一塁と二塁の間に二塁手，二塁と三塁の間に遊撃手がいる。

投手はこの四角形の対角線の交点から，

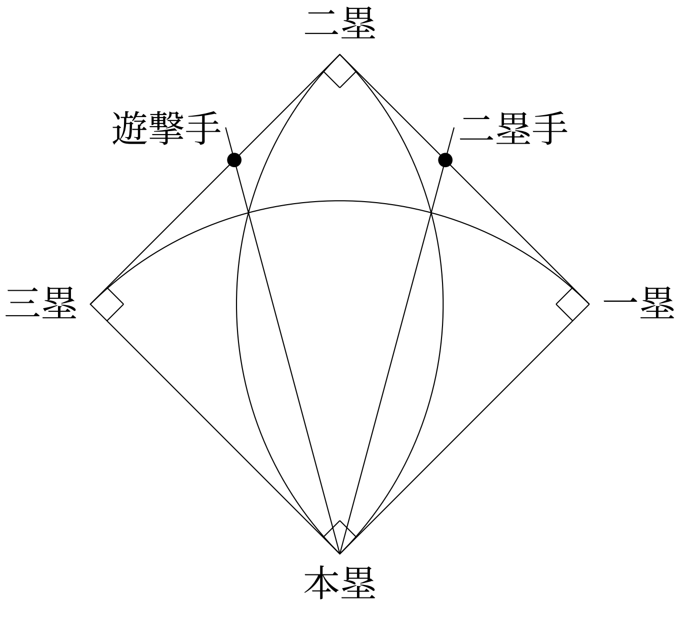
本塁に少し近い場所でボールを投げるよ。

【あお】じゃあ，一塁手，二塁手と遊撃手，三塁手で守備範囲を均等にするには，

本塁から一塁と三塁を見込む角を3等分すればいいかな。

角の3等分の作図は学習していないけれど，この図形なら作図できるね。

正三角形の作図を使って，こんな感じかな。



【れん】そのアイデアも悪くないね。

けど，二塁は本塁からの距離が一塁や三塁よりも遠いし，

フェアゾーンとファールゾーンがあることや，

投手だって守備参加できる。

他にも，打者の癖や配球などを考えると，

守備位置に明確な正解はないと思うよ。

【あお】奥が深いね。

〜〜

(1) 【会話の一部】の (ア) には最も適切な図形の名称を，

(イ) にはあてはまる数を小数第 1 位を四捨五入して整数で，

(ウ) にはあてはまる数を，それぞれ書け。

(ア) 正方形　(2 点)

(イ) 90　(2 点)

$27.431 \times 3.28 = 89.9 \cdots$

(ウ) $\sqrt{2}$　(2 点)

正方形の 1 辺の長さと対角線の長さ

(2) れんくんとあおくんは，クラス対抗の野球大会に参加した。

参加する全 6 チームが総当たり戦を行った。

総当たり戦では，先攻と後攻を入れかえて，

6 チームがそれぞれ 2 回ずつ対戦する。

例えば A チームと B チームの対戦は，

A チームが先攻の場合，B チームが先攻の場合の 2 試合が行われる。

試合数は全部で何試合になるか，求めよ。

チームをABCDEFとすると，
Aが先攻の試合はBCDEFとの対戦で5試合。
Bが先攻の試合はACDEFとの対戦で5試合。
他のチームも同様に試合をするので，
$5 \times 6 = 30$
試合数 30　(4点)

(3) あおくんは，二塁手の位置について，新しいアイデアを思いついた。

各選手の守備範囲が円と考え，二塁手の守備範囲の円が，

一塁手や遊撃手の守備範囲の円とそれぞれ接するような二塁手の位置を，

作図から決めることにした。

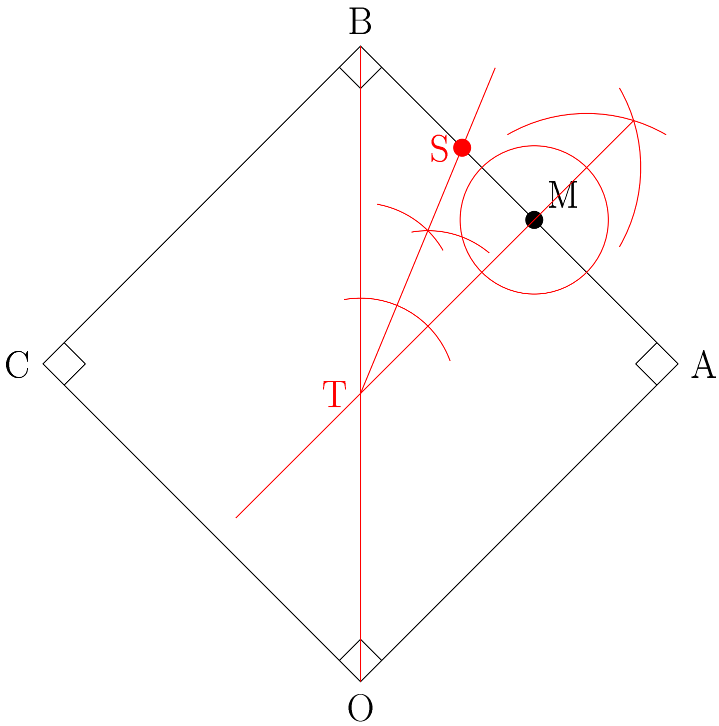
次の図について，点Mは辺AB上の点である。

線分BM上に，点Mを通る直線ABの垂線と

直線OBの両方に接する円の中心Sを，作図によって求めよ。

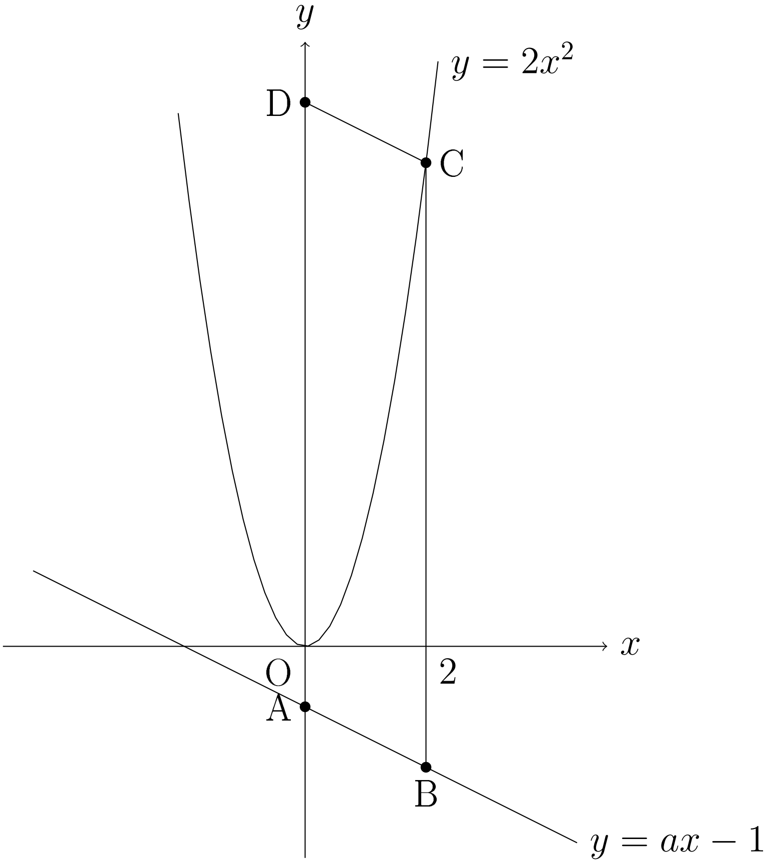
ただし，作図に使った線は消さずに残しておくこと。

また，定規やコンパスを持っていない場合は，作図の方法を文章で書け。



点Oと点Bを結ぶ。
点Mを通る垂線の作図。
直線AB上に点Mから距離の等しい点をとる。
これらの点から，点Mと異なる等しい距離の点をとり，
点Mを通る直線をひく。
点Mを通る垂線と直線BOの交点をTとする。
∠MTBの二等分線の作図。
∠MTBの大きさを二等分するため，
TMおよびTB上に点Tから距離の等しい点をとる。
これらの点から，点Tと異なる等しい距離の点をとり，
点Tを通る直線をひく。
この角の二等分線と線分BMとの交点がSである。　(5点)

問題4　図のように，2つの関数 $y=2x^2$ と $y=ax-1$ $(a<0)$ のグラフがある。点Oは原点である。点Aと点Bは $y=ax-1$ 上にあり，それぞれの x 座標は0と2である。点Bから y 軸に平行な直線と $y=2x^2$ との交点を点Cとする。y 軸上に，四角形ABCDが平行四辺形になるように点Dをとる。ただし，点Dの y 座標は正とする。このとき，次の(1)から(4)の問いに答えなさい。



(1) 点Oを回転の中心として，点Cを点対称移動した点の座標を求めよ。

点Cの座標は $x=2$，関数 $y=2x^2$ 上の点から
$y=2\times 2^2=8$
$C(2,8)$ を点Oを回転の中心として点対称移動させる。
点対称移動した点の座標 $(-2,-8)$　(3点)

(2) 原点を通り，平行四辺形ABCDの面積を2等分する直線の式を求めよ。

平行四辺形ABCDの対角線の交点は,
$A(0,-1)$ と $C(2,8)$ の中点より
$(\frac{0+2}{2}, \frac{(-1)+8}{2})=(1,\frac{7}{2})$
原点を通り,平行四辺形ABCDの面積を2等分する直線は
$(0,0)$ と $(1,\frac{7}{2})$ を通ればよい。
$y=\frac{7}{2}x$　(3点)

(3) $a=-3$ のとき，平行四辺形ABCDの面積を求めよ。

点Bの座標は $x=2$，関数 $y=-3x-1$ 上の点から，
$y=-3\times 2-1=-7$ より B$(2,-7)$
線分BCの長さは $8-(-7)=15$
平行四辺形ABCDの面積は $15\times 2=30$
面積 30　(4点)

(4) a を負の整数とする。

平行四辺形ABCDの周上およびその内部について，

x 座標と y 座標がともに整数である点の個数が，84個となる a の値を求めよ。

点Bの座標は $(2,2a-1)$
a は負の整数なので，点Bは x,y がともに整数の座標である。
点Aと点Bの中点の座標は $(\frac{0+2}{2},\frac{(-1)+(2a-1)}{2})=(1,a-1)$
これも x,y がともに整数の座標である。
線分BC上には，
$8-(2a-1)+1=-2a+10$ から
x,y がともに整数の座標が $(-2a+10)$ 個ある。
点Aと点Bの中点から点Dと点Cの中点までの線分上，
点Aから点Dまでの線分上についても，
同じ数だけ x,y がともに整数の座標がある。
したがって
$(-2a+10)\times 3=84$
$a=-9$
これは問題に適している。
$a=-9$　(5点)

問題5　図のような平行四辺形ABCDがある。辺BCの延長上に，BC $=$ CEとなる点Eをとる。点Eを通り，辺CDに平行な直線と，直線BDとの交点をFとする。平行四辺形ABCDの対角線の交点をGとする。直線EGと辺ABとの交点をHとする。点Dと点Eを結ぶ。このとき，次の(1)から(4)の問いに答えなさい。

(1) $BC = BA, \angle ABC = 48^\circ$ のとき，$\angle ACD$の大きさを求めよ。

平行四辺形は対角の大きさが等しいので,
$\angle$ABC$=\angle$ADC
BC=BA と平行四辺形は対辺の長さが等しいことから,
BC=BA=DA=DC
△DACはDA=DCの二等辺三角形より,
$\angle$ACD$=\frac{180^\circ-48^\circ}{2}=66^\circ$
66°　(3点)

(2) △ABC $\equiv$ △DCE を証明せよ。

△ABCと△DCEについて,
仮定より,　BC=CE$\cdots\cdots$(1)
平行四辺形ABCDより対辺は平行で長さが等しく,
AB=DC$\cdots\cdots$(2)
AB//DC$\cdots\cdots$(3)
(3)より,同位角が等しく,
$\angle$ABC$=\angle$DCE$\cdots\cdots$(4)
(1)(2)(4)より,2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので,
△ABC$\equiv$△DCE　(4点)

(3) HG : GE を簡単な整数の比で表せ。

AB//DC//FEより,
HG:GE=BG:GF
平行四辺形の対角線の交点より,
BG=GD$=\frac{1}{2}$BD
また BC=CE より BD=DF なので,
GF=GD+DF$=\frac{1}{2}$BD+BD$=\frac{3}{2}$BD
したがってHG:GE$=\frac{1}{2}$BD$:\frac{3}{2}$BD$=1:3$
HG:GE$=1:3$　(4点)

(4) △DEF の面積が $288\,\mathrm{cm}^2$ であるとき，△AHG の面積を求めよ。

GF= $\frac{3}{2}$DF より,
△GEF= $\frac{3}{2}$△DEF= $\frac{3}{2} \times 288 = 432\ \mathrm{cm}^2$

△GHB と △GEF は AB//FE から相似である。(証明は省略)
その相似比は (3) より $1:3$ なので,
面積比は $1^2 : 3^2 = 1 : 9$ から,
△GHB の面積は $432 \times \frac{1}{9} = 48\ \mathrm{cm}^2$

△BCD と △BEF は DC//FE から相似である。(証明は省略)
BC=CE より相似比は $1:2$
よって CD:EF= $1:2$
BH= $\frac{1}{3}$EF= $\frac{1}{3} \times 2$CD= $\frac{2}{3}$AB
したがって BH:HA= $2:1$ なので,
△AHG の面積は $48 \times \frac{1}{2} = 24\ \mathrm{cm}^2$

$24\ \mathrm{cm}^2$　(5 点)

＜別アプローチ＞
△DEF, △DEB, △DCB, △DAB, △GAB の順に,
面積を求めてもよい。
この場合も BH:HA は必要。