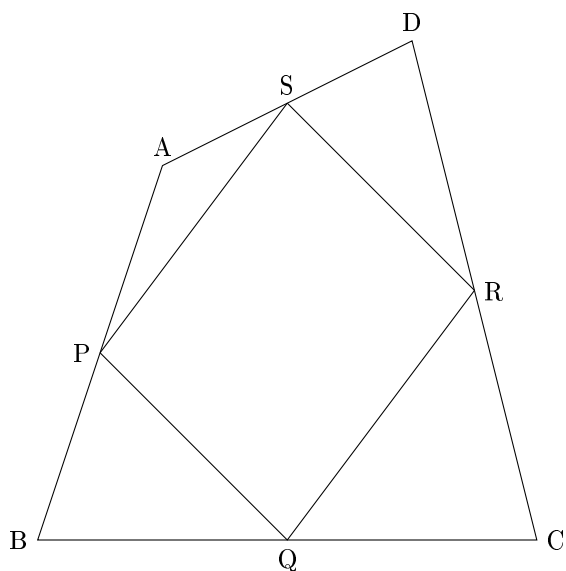


相似な図形 [中点連結定理]

<演習問題>

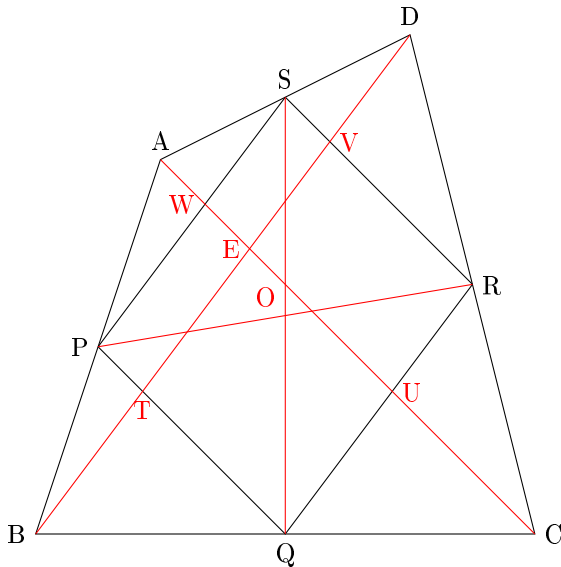
四角形 ABCD について、
辺 AB、辺 BC、辺 CD、辺 DA の中点を、
それぞれ P、Q、R、S とする。
このとき、
四角形 PQRS は平行四辺形であることを
2通りの方法で証明せよ。
ただし、平行四辺形になる条件は同じものを
用いてはならない。



相似な図形 [中点連結定理]

<演習問題>

四角形 ABCD について、
辺 AB、辺 BC、辺 CD、辺 DA の中点を、
それぞれ P、Q、R、S とする。
このとき、
四角形 PQRS は平行四辺形であることを
2通りの方法で証明せよ。
ただし、平行四辺形になる条件は同じものを
用いてはならない。



<解答例>

(重複する部分は一部省略している)

-方法 I-

対角線 AC を引く。
 $\triangle BAC$ について、
仮定より、点 P は辺 AB の中点で、
点 Q は辺 BC の中点なので、中点連結定理より、
 $PQ = \frac{1}{2}AC$, $PQ \parallel AC$ ……(1)
同様に、 $\triangle DCA$ について
 $RS = \frac{1}{2}AC$, $RS \parallel AC$ ……(2)

(1)(2) より、
 $PQ = RS$, $PQ \parallel RS$
したがって、
1組の対辺が平行で、その長さが等しいので、
四角形 PQRS は平行四辺形である。

-方法 I'-

対角線 BD を引く。
(方法 I と同様に中点連結定理を用いて)
 $PS = \frac{1}{2}BD$, $PS \parallel BD$ ……(1)
 $QR = \frac{1}{2}BD$, $QR \parallel BD$ ……(2)
(1)(2) より、
 $PS = QR$, $PS \parallel QR$
1組の対辺が平行で、その長さが等しいので、
四角形 PQRS は平行四辺形である。

-方法 II-

(方法 I および方法 I' と同じく)
 $PQ \parallel RS$, $PS \parallel QR$
2組の対辺が平行なので、
四角形 PQRS は平行四辺形である。

-方法 III-

(方法 I および方法 I' と同じく)
 $PQ = RS$, $PS = QR$
2組の対辺がそれぞれ等しいので、
四角形 PQRS は平行四辺形である。

-方法 IV-

PR と SQ の交点を O とする。
 $\triangle OPQ$ と $\triangle ORS$ について、
(方法 I と同じく)
 $PQ = RS$, $PQ \parallel RS$ ……(1)
(1) より、錯角が等しく
 $\angle OQP = \angle OSR$ ……(2)
 $\angle OPQ = \angle ORS$ ……(3)
(1)(2)(3) より、
1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、
 $\triangle OPQ \cong \triangle ORS$
よって、 $OP = OR$, $OQ = OS$ より、
対角線がそれぞれの中点で交わるので、
四角形 PQRS は平行四辺形である。

-方法 IV'-

PR と SQ の交点を O とする。
(方法 I' と同じく)
 $PS = QR$, $PS \parallel QR$
(方法 IV と同様に)
 $\triangle OSP \cong \triangle OQR$
 $OP = OR$, $OQ = OS$
対角線がそれぞれの中点で交わるので、
四角形 PQRS は平行四辺形である。

-方法 V-

対角線 AC と BD を引き、交点を E とする。
PQ と BD の交点を T、QR と AC の交点を U、
RS と BD の交点を V、SP と AC の交点を W とする。
(方法 I および方法 I' と同じく)
 $PQ \parallel RS \parallel AC$ ……(1)
 $PS \parallel QR \parallel BD$ ……(2)
(1)(2) から錯角、同位角は等しいので、
 $\angle SRQ = \angle RUC = \angle DEC = \angle DTQ = \angle SPQ$
よって、
 $\angle SRQ = \angle SPQ$ ……(3)
同様に、
 $\angle PSR = \angle PQR$ ……(4)
(3)(4) より、2組の対角の大きさがそれぞれ
等しいので、四角形 PQRS は平行四辺形である。