展開と因数分解 [数の性質の証明]

＜演習問題＞

(1)
2 つの整数について、
それぞれの平方及びはじめの 2 数の和の平方、
これら 3 数の和は 2 の倍数なる。
これを文字を使って証明せよ。

(2)
連続する 2 つの 3 の倍数について、
大きい数の平方から
小さい数の平方をひいた差は
はじめの 2 数の和の 3 倍になる。
これを文字を使って証明せよ。

(3)
真ん中の数が 5 の倍数である
連続する 3 つの整数について、
最も大きい数の 2 乗から
最も小さい数の 2 乗をひいた差は
20 の倍数になる。
これを文字を使って証明せよ。

(4)
a を一の位、十の位が
それぞれ 0 でない 2 けたの自然数とする。
b を、
a の十の位の数字と一の位の数字を入れかえた
2 けたの自然数とする。
このとき $a^2 - b^2$ は 99 の倍数になる。
これを文字を使って証明せよ。

展開と因数分解 [数の性質の証明]

<演習問題>

(1)
2 つの整数について、
それぞれの平方及びはじめの 2 数の和の平方、
これら 3 数の和は 2 の倍数なる。
これを文字を使って証明せよ。

<解答例>

n, m を整数とすると、
それぞれの平方、
及びはじめの 2 数の和の平方はそれぞれ
$n^2,\ m^2,\ (n+m)^2$
と表される。
したがって、これら 3 数の和は

$$\begin{aligned} n^2+m^2+(n+m)^2 &= n^2+m^2 \\ &\quad +n^2+2mn+m^2 \\ &= 2n^2+2m^2+2mn \\ &= 2(n^2+m^2+mn) \end{aligned}$$

ここで、n^2+m^2+mn は整数なので
$2(n^2+m^2+mn)$ は 2 の倍数である。
したがって、
2 つの整数について、
それぞれの平方及びはじめの 2 数の和の平方、
これら 3 数の和は 2 の倍数なる。

(2)
連続する 2 つの 3 の倍数について、
大きい数の平方から
小さい数の平方をひいた差は
はじめの 2 数の和の 3 倍になる。
これを文字を使って証明せよ。

<解答例>

n を整数とすると、
連続する 2 つの 3 の倍数は
$3n,\ 3n+3$
と表される。
したがって、
大きい数の平方から小さい数の平方をひいた差は

$$\begin{aligned} (3n+3)^2-(3n)^2 &= 9n^2+18n+9-9n^2 \\ &= 18n+9 \\ &= 3(6n+3) \\ &= 3(3n+3n+3) \end{aligned}$$

ここで、$3n+3n+3$ ははじめの 2 数の和のだから、
$3(3n+3n+3)$ ははじめの 2 数の和の 3 倍である。
したがって、
連続する 2 つの 3 の倍数について、
大きい数の平方から小さい数の平方をひいた差は
はじめの 2 数の和の 3 倍になる。

(3)
真ん中の数が 5 の倍数である
連続する 3 つの整数について、
最も大きい数の 2 乗から
最も小さい数の 2 乗をひいた差は
20 の倍数になる。
これを文字を使って証明せよ。

<解答例>

n を整数とすると、
真ん中の数が 5 の倍数である連続する 3 つの整数は
$5n-1,\ 5n,\ 5n+1$
と表される。
したがって、
最も大きい数の 2 乗から
最も小さい数の 2 乗をひいた差は

$$\begin{aligned} (5n+1)^2-(5n-1)^2 &= 25n^2+10n+1 \\ &\quad -(25n^2-10n+1) \\ &= 20n \end{aligned}$$

ここで、n は整数だから、$20n$ は 20 の倍数である。
したがって、
真ん中の数が 5 の倍数である連続する 3 つの整数について、
最も大きい数の 2 乗から
最も小さい数の 2 乗をひいた差は
20 の倍数になる。

(4)
a を一の位、十の位が
それぞれ 0 でない 2 けたの自然数とする。
b を、
a の十の位の数字と一の位の数字を入れかえた
2 けたの自然数とする。
このとき a^2-b^2 は 99 の倍数になる。
これを文字を使って証明せよ。

<解答例>

a の十の位の数字を x、
一の位の数字を y、とすると、
$a=10x+y$
$b=10y+x$
と表される。
したがって、a^2-b^2 は

$$\begin{aligned} a^2-b^2 &= (10x+y)^2-(10y+x)^2 \\ &= 100x^2+20xy+y^2-(100y^2+20xy+x^2) \\ &= 99x^2-99y^2 \\ &= 99(x^2-y^2) \end{aligned}$$

ここで、x^2-y^2 は整数だから、
$99(x^2-y^2)$ は 99 の倍数である。
したがって、a^2-b^2 は 99 の倍数になる。