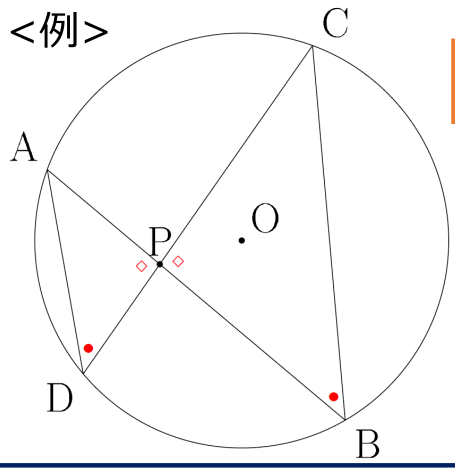
円周角の定理の活用(2)

円と三角形

円と直線が交わると、**合同あるいは相似な三角形**ができ、
線分の長さや線分の比が得られる

-円の中心から円周上までの長さは等しい(半径)、
円の外部にある1点から円に引いた2本の接線の長さは等しい
-弧と中心角・円周角の関係(円周角の定理)、
接線は円の半径と接点で垂直、直線と直線が交わる(対頂角)　など

<例>

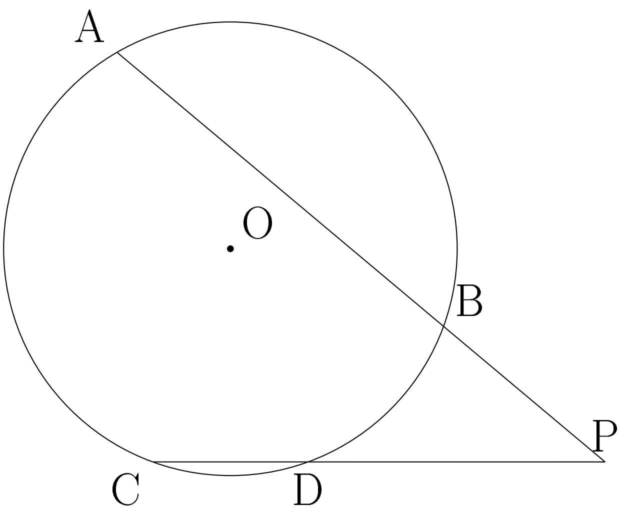


円の2つの弦AB,CDの交点Pについて次式が成立

$$PA \times PB = PC \times PD$$ (方べきの定理)

△PAD と △PCB について、
弧 AC の円周角から ∠ADP= ∠CBP ……(1)
対頂角から ∠APD= ∠CPB ……(2)
(1)(2) より 2 組の角がそれぞれ等しいので、
△PAD∽△PCB
対応する辺の長さの比は等しいので、
PA : PC=PD : PB より、　$PA \times PB = PC \times PD$

<確認問題>
下の図について、円の弦 AB,CD と、
これらを延長してできる交点 P について、
$PA \times PB = PC \times PD$
であることを証明せよ。(方べきの定理)



円周角の定理の活用(2)

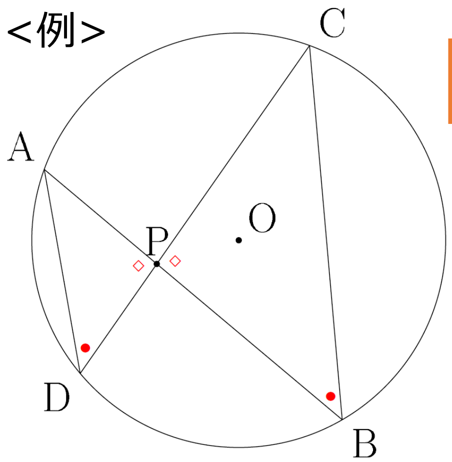
円と三角形

円と直線が交わると、**合同あるいは相似な三角形**ができ、
線分の長さや線分の比が得られる

-円の中心から円周上までの長さは等しい(半径)、
円の外部にある1点から円に引いた2本の接線の長さは等しい

-弧と中心角・円周角の関係(円周角の定理)、
接線は円の半径と接点で垂直、直線と直線が交わる(対頂角)　など

<例>



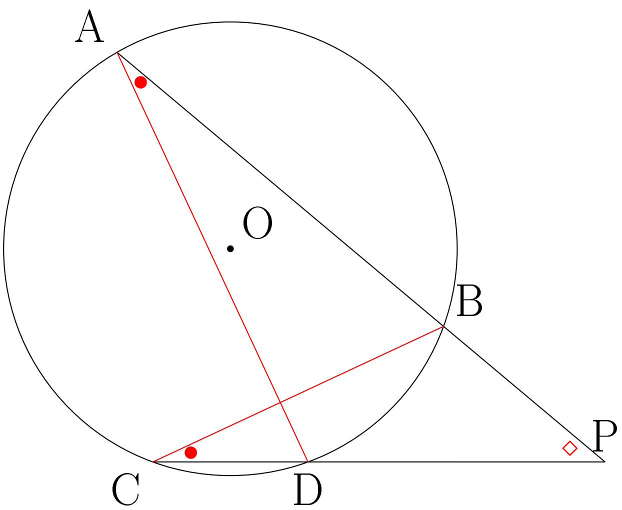
円の2つの弦AB,CDの交点Pについて次式が成立

$$PA \times PB = PC \times PD$$ (方べきの定理)

$\triangle PAD$ と $\triangle PCB$ について、
弧 AC の円周角から $\angle ADP = \angle CBP$ ……(1)
対頂角から $\angle APD = \angle CPB$ ……(2)
(1)(2) より 2 組の角がそれぞれ等しいので、
$\triangle PAD \backsim \triangle PCB$
対応する辺の長さの比は等しいので、
$PA : PC = PD : PB$ より、　$PA \times PB = PC \times PD$

＜確認問題＞

下の図について、円の弦 AB,CD と、
これらを延長してできる交点 P について、
$PA \times PB = PC \times PD$
であることを証明せよ。(方べきの定理)



＜解答例＞

点 A と点 D、点 B と点 C をそれぞれ結ぶ。
$\triangle PAD$ と $\triangle PCB$ について、
円周角の定理から、
弧 BD に対する円周角は等しいので、
$\angle PAD = \angle PCB$ ……(1)
共通な角なので、
$\angle APD = \angle CPB$ ……(2)
したがって、(1)(2) より、
2 組の角がそれぞれ等しいので、
$\triangle PAD \backsim \triangle PCB$
対応する辺の長さの比は等しいので、
$PA : PC = PD : PB$
よって、
$PA \times PB = PC \times PD$