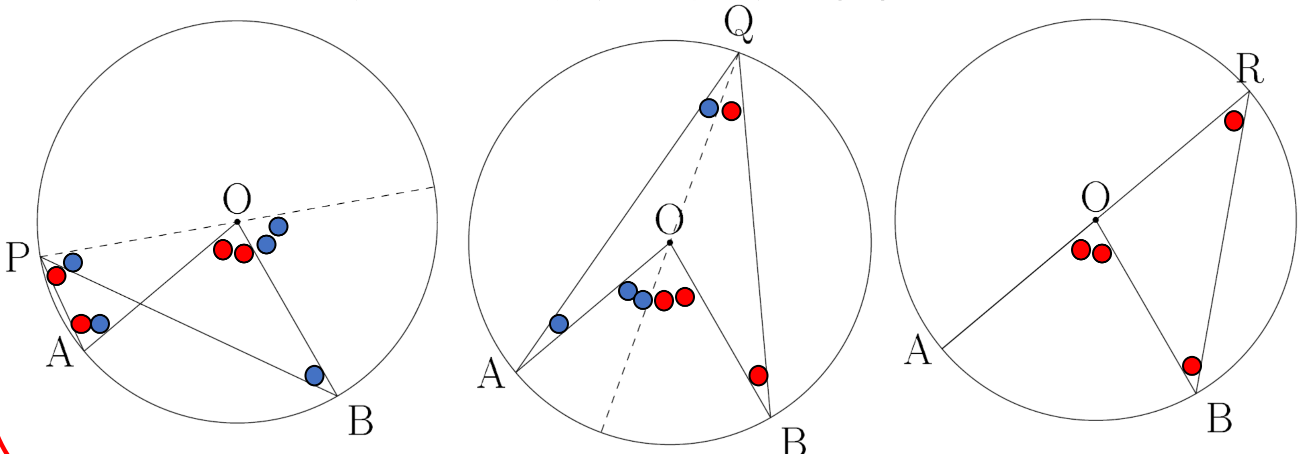
円周角の定理の証明

円周角の定理の証明手順

- 弧を除く円周上の点から円の中心を通る直線を引く
- **円の中心から円周上の点までの距離は一定(半径)**なので、
二等辺三角形が得られる(二等辺三角形の**底角の大きさは等しい**)
- **三角形の外角は、それと隣り合わない2つの内角の和に等しい**ことを用いて、円周角と中心角の関係を導く



△OPBと△OPAに注目　△OQBと△OQAに注目　△ORBに注目

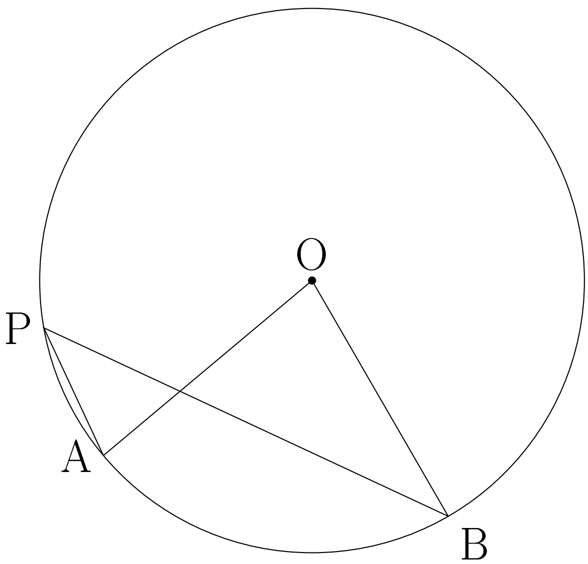
＜確認問題＞

上記の証明手順を参考に、

下図の円Oと円周上の点A,B,Pについて、

$\angle APB = \frac{1}{2} AOB$

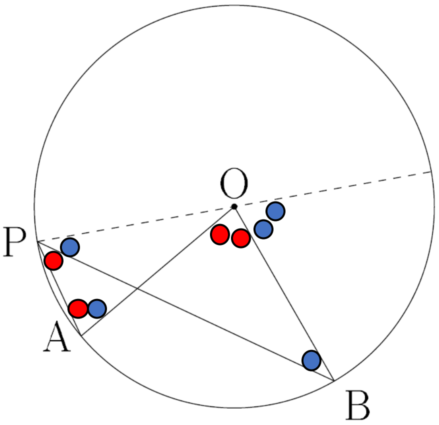
であることを証明せよ。



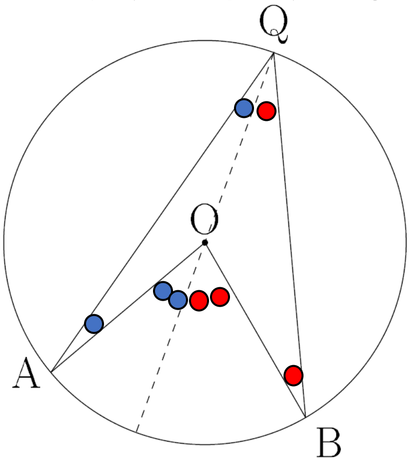
円周角の定理の証明

円周角の定理の証明手順

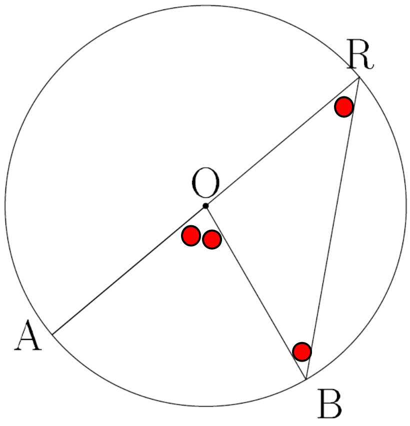
- 弧を除く円周上の点から円の中心を通る直線を引く
- **円の中心から円周上の点までの距離は一定(半径)**なので、**二等辺三角形**が得られる(二等辺三角形の**底角の大きさは等しい**)
- **三角形の外角は、それと隣り合わない2つの内角の和に等しい**ことを用いて、円周角と中心角の関係を導く



△OPBと△OPAに注目



△OQBと△OQAに注目



△ORBに注目

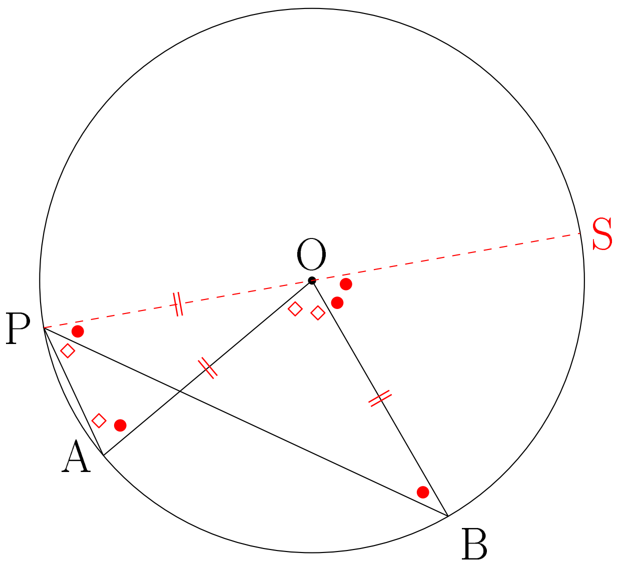
＜確認問題＞

上記の証明手順を参考に、

下図の円 O と円周上の点 A,B,P について、

$\angle \mathrm{APB} = \frac{1}{2} \mathrm{AOB}$

であることを証明せよ。



＜解答例＞

点 P と点 O を通る直線を引き、
円との交点で点 P と異なる点を S とする。
点 P,B は円周上の点より、
△OPB は OP=OB の二等辺三角形である。
二等辺三角形の底角の大きさは等しいので、
$\angle \mathrm{OPB} = \angle \mathrm{OBP}$
三角形の外角は
それと隣り合わない 2 内角の和に等しいので、
$\angle \mathrm{BOS} = \angle \mathrm{OPB} + \angle \mathrm{OBP} = 2\angle \mathrm{OPB}$ ……(1)
同様に、点 P,A は円周上の点より、
△OPA は OP=OA の二等辺三角形なので、
$\angle \mathrm{OPA} = \angle \mathrm{OAP}$
外角と内角の関係から
$\angle \mathrm{AOS} = \angle \mathrm{OPA} + \angle \mathrm{OAP} = 2\angle \mathrm{OPA}$ ……(2)
(1)(2) を用いて、
$\angle \mathrm{AOB}$
$= \angle \mathrm{AOS} - \angle \mathrm{BOS}$
$= 2\angle \mathrm{OPA} - 2\angle \mathrm{OPB}$
$= 2(\angle \mathrm{OPA} - \angle \mathrm{OPB})$
$= 2\angle \mathrm{APB}$
したがって、
$\angle \mathrm{APB} = \frac{1}{2} \mathrm{AOB}$